INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Ştiinţe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 1.

Două lentile având distanţele focale f_1, respectiv f_2 sunt situate la distanţa $d>0$ una faţă de cealaltă; în această situaţie distanţa focală f a sistemului este dată de legea de compoziţie $f=f_1\circ f_2=\dfrac{f_1\cdot f_2}{f_1+f_2-d}$

Considerând legea de compoziţie definită pe $G=(0;+\infty)$, se cere:

a) Să se demonstreze că legea este asociativă.
b) Să se studieze dacă legea admite element neutru.
c) Să se calculeze $\dfrac{d}{2017}\circ\dfrac{d}{2016}\circ...\circ d\circ(2d)\circ(3d)\circ(4d)\circ...\circ(2017d)$.

Soluție:

a) Verifică asociativitatea……………………………………………………………..…………..2p
b) Demonstrează că nu există element neutru…………………………………………………..…2p
c) Demonstrează că d este elementul absorbant al legii de compoziţie ($d\circ f_1=d, f_1\circ d=d$). ……..2p
Finalizare...1p

Problema 2.

Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ şi $g(x)=\dfrac{1}{x(x^2+1)}$

a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}G(x)$, unde G este primitiva lui g care se anulează în $x=1$.

c) Să se demonstreze : $\int_1^{tgx} f(t)dt+\int_1^{ctgx} g(t)dt=0,\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Soluție:

a) $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{\ln 2}{2}$ 2p

b) Descompune $\dfrac{1}{x(x^2+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}$ 1p

$G(x)=\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+\dfrac{\ln 2}{2}$ 1p

Limita este $\frac{\ln 2}{2}$ 1p

c) Demonstrează relaţia 2p

Problema 3.

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

b) Să se demonstreze că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_0^{x^3} f(t)dt$ este strict crescătoare pe $[0,1]$

c) Să se demonstreze $\int_0^1 f(x)dx \in (1,2)$.

Soluție:

a) $\int_0^1 xf(x)dx = \frac{e-1}{2}$ 2p

b) $F'(x)=3x^2e^{x^6}$ 2p

$F'(x)>0, \forall x\in(0,1)$, deci F este strict crescătoare pe $[0,1]$ 1p

c) $x^2 \le x, \forall x\in[0,1] \Rightarrow e^{x^2} \le e^x, \forall x\in[0,1] \Rightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx \le e-1<2$ 1p

$e^{x^2} \ge 1+x^2 \Rightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx \ge \int_0^1 (1+x^2)dx = \frac{4}{3} > 1$ 1p

Problema 4.

$G=\left\{A(k)=\begin{pmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^k & 2^k \end{pmatrix}, k\in\mathbb{Z}\right\}$ şi pentru fiecare $t\in\mathbb{Z}$ notăm $H_t=\{A(kt-1) / k\in\mathbb{Z}\}$. Se admite faptul că $(G,\cdot)$ este un grup, unde " $\cdot$" este înmulţirea matricelor.

a) Să se demonstreze că pentru orice $n, p\in\mathbb{Z}$, $A(n)\cdot A(p)=A(n+p+1)$.

b) Să se demonstreze că, pentru $\forall t\in\mathbb{Z}$, H_t este un subgrup al grupului $(G,\cdot)$

c) Să se demonstreze că grupurile $(G,\cdot)$ şi $(\mathbb{Z},+)$ sunt izomorfe.

Soluție:

a) Demonstrează relaţia..2p

b) Demonstrează că elementul neutru este $A(-1)$ 1p

Demonstrează că $(H_t,\cdot)$ este subgrup...2p

c) Demonstrează ca funcţia $f:\mathbb{Z}\to G, f(k)=A(k-1)$ este izomorfism.......................................2p